

Fit 하는 순간, 오답도 실력이 된다!

이지수능교육(ezeducation)

고3 2022년 11월
수학기하 오답노트플러스

이지오답핏



■ 문항별 분석

[illegible]

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학확통 14번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 함수의 극한과 연속 | 함수의 연속 | 함수의 극한과 연속 합답형

001 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

함수 $h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $h(1) = 3$
 ㄴ. 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 이면 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

§ 출전 : 고3 2009년 04월 학력평가 수학기형 11번

002 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x-1} & (|x| > 1) \\ \frac{a}{1-x} & (|x| < 1) \\ \frac{a}{2} & (|x| = 1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a 는 실수이다.) [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a 의 값이 존재한다.
 ㄷ. 방정식 $f(x) = a$ 는 한 개의 실근을 갖는다. (단, $a \neq 0$)

- ① ㄱ
 ② ㄷ
 ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

§ 출전 : 2015년 E변형특강 수학B형 PART 2 40번

003 함수 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < -1) \\ 0 & (x = -1) \\ x^2 & (-1 < x < 1) \\ x-2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. 함수 $f(x) - |f(x)|$ 가 불연속인 점은 1개다.
 ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \{f(x) + f(-x)\} = 0$
 ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a 는 없다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학기하 29번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

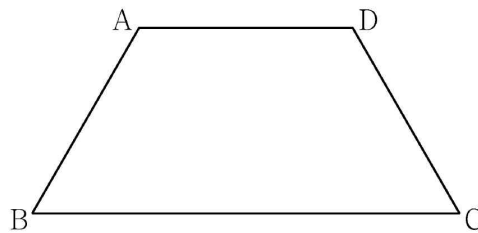
§ 세부단원정보 : 평면벡터 | 평면벡터의 성분과 내적 | 벡터의 내적

004 평면 α 위에 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 2$, $\angle ABC = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$ 의 값을 구하시오.

(가) $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$

(나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$

(다) $2 \times \angle BQA = \angle PBQ < \frac{\pi}{2}$

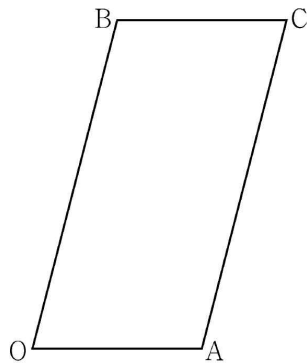


§ 출전 : 고3 2021년 수능 수학기하 29번

005 좌표평면에서 $\overrightarrow{OA} = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OB} = 2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1) \\ \text{(나)} \quad & \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \end{aligned}$$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{3OP} - \overrightarrow{OX}|$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. $M \times m = a\sqrt{6} + b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.)



§ 출전 : 고3 2021년 10월 학력평가 수학기하 28번

006 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|} = 3 \\ \text{(나)} \quad & \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| = -2 |\overrightarrow{PC}|^2 \end{aligned}$$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{PD}$ 이다. 실수 k 의 값은?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학기하 30번

이게 바로 핵심이야!

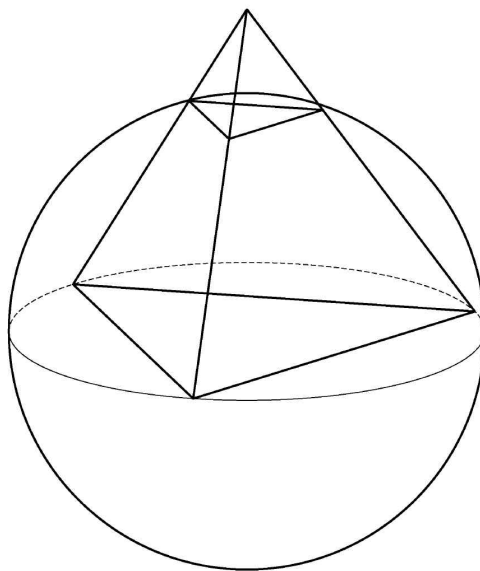
왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

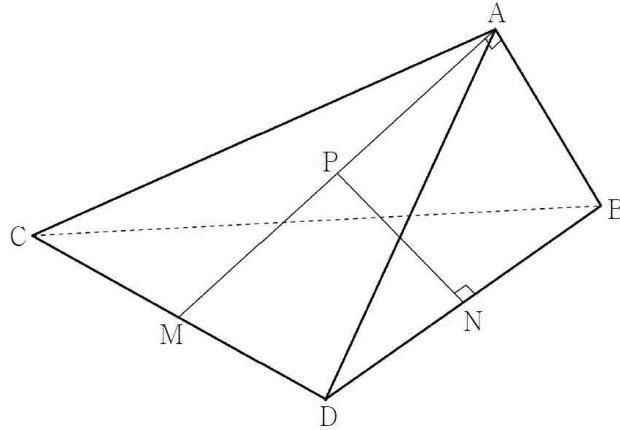
§ 세부단원정보 : 공간도형과 공간벡터 | 공간도형 | 공간에서의 각

007 좌표공간에 정사면체 $ABCD$ 가 있다. 정삼각형 BCD 의 외심을 중심으로 하고 점 B 를 지나는 구를 S 라 하자. 구 S 와 선분 AB 가 만나는 점 중 B 가 아닌 점을 P , 구 S 와 선분 AC 가 만나는 점 중 C 가 아닌 점을 Q , 구 S 와 선분 AD 가 만나는 점 중 D 가 아닌 점을 R 라 하고, 점 P 에서 구 S 에 접하는 평면을 α 라 하자. 구 S 의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k 이다. k^2 의 값을 구하시오.



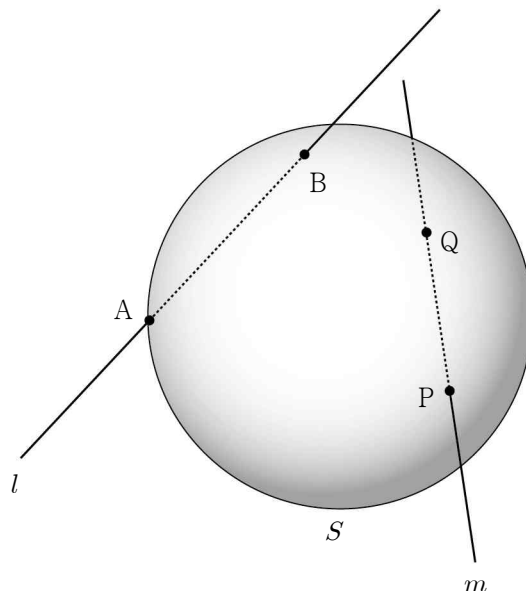
§ 출전 : 고3 2021년 07월 학력평가 수학기하 29번

008 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{CD}=8$, $\overline{BC}=\overline{BD}=4\sqrt{5}$ 인 사면체 $ABCD$ 에 대하여 직선 AB 와 평면 ACD 는 서로 수직이다. 두 선분 CD , DB 의 중점을 각각 M , N 이라 할 때, 선분 AM 위의 점 P 에 대하여 선분 DB 와 선분 PN 은 서로 수직이다. 두 평면 PDB 와 CDB 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos 40\cos^2 \theta$ 구하시오.



§ 출전 : 고3 2016년 07월 학력평가 수학기하 29번

009 그림과 같이 반지름의 길이가 2 인 구 S 와 서로 다른 두 직선 l , m 이 있다. 구 S 와 직선 l 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A , B , 구 S 와 직선 m 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P , Q 라 하자. 삼각형 APQ 는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\angle ABQ = \frac{\pi}{2}$ 일 때 평면 APB 와 평면 APQ 가 이루는 각의 크기 θ 에 대하여 $100\cos^2 \theta$ 의 값을 구하시오. [4점]





정답과 해설

1 정답 ①

출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } x > 1 \text{에서 } g(x) &= x \text{이므로} \\ h(1) &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} (1+t) \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\text{ㄴ. } h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$$

이므로

$$x < -3 \text{일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때 } h(-3) = -3 \times f(-1)$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때 } h(x) = x \times f(x+2)$$

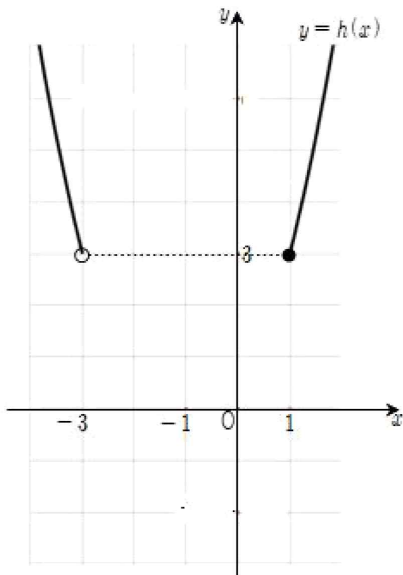
$$x = -1 \text{일 때 } h(-1) = f(-1) \times 1$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때 } h(x) = f(x) \times (x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때 } h(1) = 1 \times 3$$

$$x > 1 \text{일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

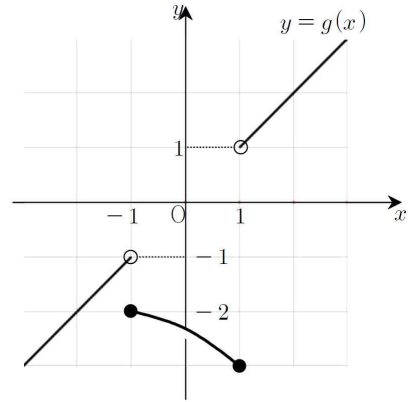
즉, $x < -3$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$f(-3) \neq 3$ 이면 함수 $h(x)$ 는 $x = -3$ 에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$$h(-3) = -3 \times f(-1) = -3 \times (-2) = 6$$

$$h(-1) = f(-1) \times 1 = -2 \times 1 = -2$$

이다.

$$-3 < x < -1 \text{에서 } h(x) > 0$$

또 $-1 < x < 1$ 에서

$$h(x) = f(x) \times (x+2) \text{이므로}$$

$$h'(x) = f'(x) \times (x+2) + f(x)$$

$$f'(x) < 0, x+2 > 0, f(x) < 0 \text{이므로}$$

$$h'(x) < 0$$

즉, $-1 < x < 1$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소하고, $f(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$$f(x) = 2 \text{라 하자.}$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때, } h(x) = x \times 2 = 2x$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(x) = 2 \times 1 = 2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때, } h(x) = 2(x+2)$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} 2(x+2) = 2$$

$$h(-1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} h(x)$$

이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$$f(x) = -x - 3 \text{이라 하자.}$$

$$x < -3 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때, } h(x) = -3 \times (-2) = 6$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때,}$$

$$h(x) = x \times \{-(x+2) - 3\} = -x(x+5)$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(-1) = -2 \times 1 = -2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때,}$$

$$h(x) = (-x-3) \times (x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때, } h(x) = 1 \times 3 = 3$$

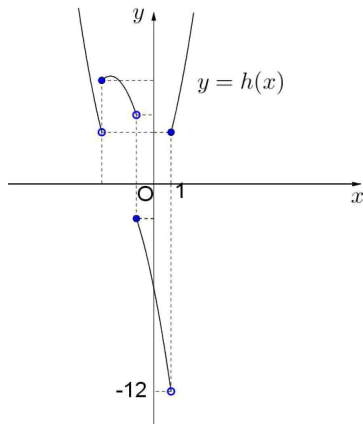
때,

때,

$x > 1$ 일 때, $h(x) = x(x+2)$

이때, $\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = -12$, $h(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 없다. (거짓)

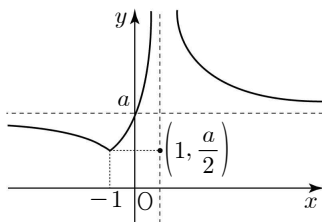


2 [정답] ⑤

[출제의도] 함수의 연속성 이해하기

[해설] i) $a = 0$ 인 경우, $f(x) = 0$

ii) $a > 0$ 인 경우



iii) $a < 0$ 인 경우

ii)의 그래프를 x 축으로 대칭이동한 그래프이다.

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \frac{a}{2}$ (참)

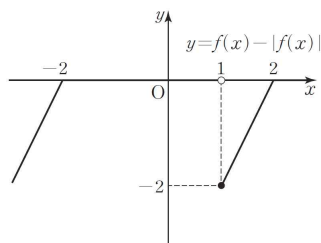
ㄴ. $a = 0$ 일 때, 함수 $f(x) = 0$ 이므로 모든 실수에서 연속이다. (참)

ㄷ. $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = a$ 와 오직 한 점에서 만난다. (참)

3 [정답] ①

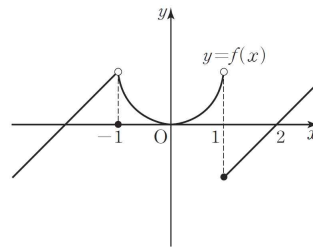
ㄱ. $f(x) - |f(x)| = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ 2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$ 이므로

함수 $y = f(x) - |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

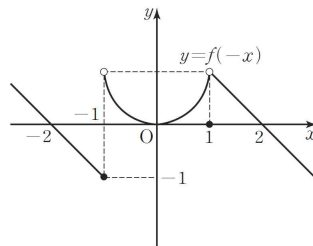


함수 $f(x) - |f(x)|$ 는 $x = 1$ 에서만 불연속이므로 불연속인 점은 1개. (참)

ㄴ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것으로 다음 그림과 같다.

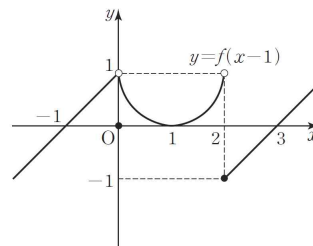


$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1-0} \{f(x) + f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-0} f(-x) \\ &= 1 + 1 = 2 \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

ㄷ. [반례] $a = 1$ 을 대입하면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수

$y = f(x-1)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 1$ 에서 불연속이고, 함수

$y = f(x-1)$ 은 $x = 0$, $x = 2$ 에서 불연속이다.

(i) $x = -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)f(x-1) \\ &= f(-1)f(-2) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x = -1$ 에서 연속

(ii) $x = 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow +0} f(x)f(x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} f(x)f(x-1) = f(0)f(-1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x = 0$ 에서 연속

(iii) $x = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)f(x-1) \\ &= f(1)f(0) = 0 \text{이므로 } x = 1 \text{에서} \end{aligned}$$

연속

(iv) $x = 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)f(x-1) \\ &= f(2)f(1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x=2$ 에서 연속

(i), (iv)에서 함수 $f(x)f(x-1)$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 상수 a 가 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

4 정답 12

출제의도 : 벡터의 연산과 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾고, 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

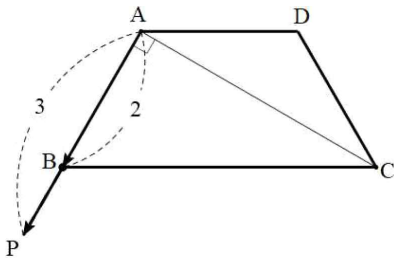
이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

따라서 점 P는 선분 BA를 1:3으로 외분하는 점이고,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 3$$

이다.



한편, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$,

$\overline{AC} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 6$$

이어야 하므로 점 H는 선분 AC 위에 있고

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{3} \times \overline{AH} = 6$$

즉,

$$\overline{AH} = \sqrt{3}$$

이다.

따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.

이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

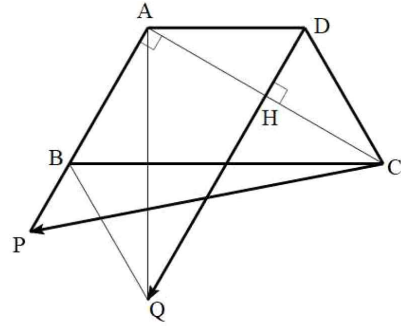
$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

즉, $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q는 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 직선 DH와 만나는 점이어야 한다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$$\overline{AD} = 2, \overline{AQ} = 2\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{DQ} = \sqrt{4+12} = 4$$

따라서

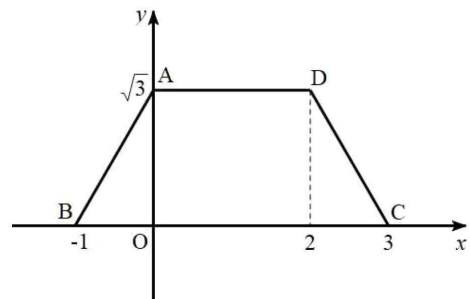
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{DQ}| \cos \frac{\pi}{2} + |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{DQ}| \cos 0 \\ &= 0 + 3 \times 4 \times 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

다음 그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(3, 0)$, $D(2, \sqrt{3})$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$$

에서

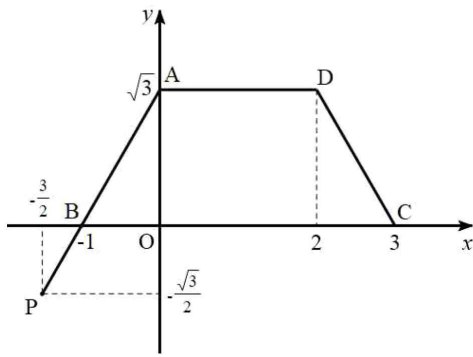
$$(3, -\sqrt{3}) = 2\{(2, 0) + (a+1, b)\}$$

$$3 = 2(a+3) \text{에서 } a = -\frac{3}{2}$$

$$-\sqrt{3} = 2b \text{에서 } b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $P(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 다음 그림과 같이 세 점 A,

B, P는 한 직선 위에 있고 $\overline{BP} = 1$ 이다.



또, 점 Q의 좌표를 $Q(x, y)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$$

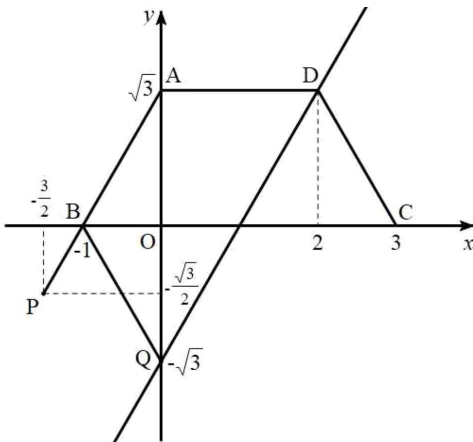
에서

$$(3, -\sqrt{3}) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

$$3x + \frac{9}{2} - \sqrt{3}y - \frac{3}{2} = 6$$

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

이므로 점 Q는 직선 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

즉 $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표는 $Q(0, -\sqrt{3})$

이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= \left(-\frac{9}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-2, -2\sqrt{3}) \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

5 정답 100

출제의도 : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

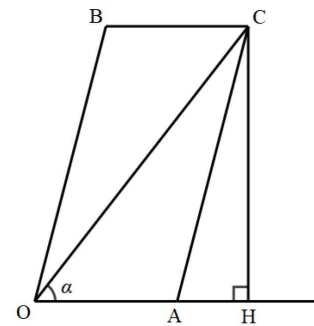
조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos(\angle AOB) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - 1 = 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

(i) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는 $\overrightarrow{OP}$ 의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$ 의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최대가 된다. 다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA = \alpha$ 라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$ 에서

$$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{AC} \times \cos(\angle CAH) \\ &= \overline{OB} \times \frac{1}{4} \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= 2 + 8 + 2 = 12 \end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$$

그러므로

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OC}| \cos \alpha \\ &= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{OP}| = 3\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$$

이때 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 반대 방향이면

$$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OX}|$$

이므로

$$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

- (ii) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는 $\overrightarrow{OP}$ 의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$ 의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OC}| \\ &= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 같은 방향이면

$$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OX}|$$

이므로

$$m = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned}M \times m &= 4\sqrt{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right) \\ &= 6\sqrt{6} - 8\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 6^2 + (-8)^2 \\ &= 100\end{aligned}$$

6 [정답] ①

[출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

$$\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|} = 3 \text{에서 } |\overrightarrow{PC}| = t \ (t > 0) \text{이라 하면 } |\overrightarrow{PA}| = 3t$$

두 벡터 $\overrightarrow{PB}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = 135^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| = -2 |\overrightarrow{PC}|^2 \text{에서}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} |\overrightarrow{PC}| \text{이므로 } |\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2}t$$

$\angle APB = \angle BPC = 135^\circ$, $\angle CPA = 90^\circ$ 이므로 세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 하면

$$S_1 : S_2 : S_3 = 3t^2 : t^2 : \frac{3}{2}t^2 = 6 : 2 : 3$$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D 이므로 $\overline{AD} : \overline{DP} = (S_1 + S_2 + S_3) : S_2 = 11 : 2$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{AD} = \frac{11}{2} \overrightarrow{PD} \text{ 이므로 } k = \frac{11}{2}$$

7 정답 24

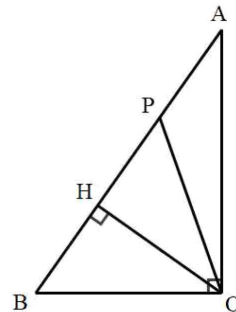
출제의도 : 공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 S의 중심, 즉 삼각형 BCD의 외심을 O라 하면 직각삼각형 ABO에서

$$\overline{AB} = 6\sqrt{3}, \overline{BO} = 6, \overline{AO} = 6\sqrt{2}$$

이다.



이때 점 P가 구 S 위에 있으므로

$$\overline{OP} = 6$$

즉, 삼각형 OBP가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BP의 중점이다.

한편, $\triangle ABO \sim \triangle OBH$ 이므로

$$6 : 6\sqrt{3} = \overline{BH} : 6$$

에서

$$\overline{BH} = 2\sqrt{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{AB} - \overline{BP} \\ &= \overline{AB} - 2 \times \overline{BH} \\ &= 6\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로 삼각형 PQR는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.

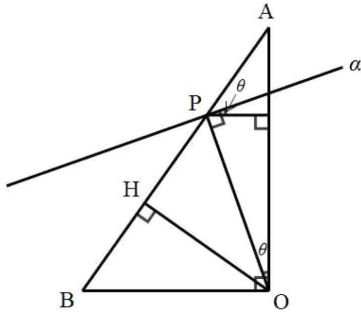
즉, 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

한편, 다음 그림과 같이 평면 α 와 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle AOP = \theta$$

이다.



이때 직각삼각형 OBG에서

$$\sin(\angle BOH) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos(\angle BOH) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

이고, $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\angle BOH$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\angle BOH\right) \\ &= \sin(2\angle BOH) \\ &= 2\sin(\angle BOH)\cos(\angle BOH) \\ &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} k &= 3\sqrt{3} \times \cos\theta \\ &= 3\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

이므로

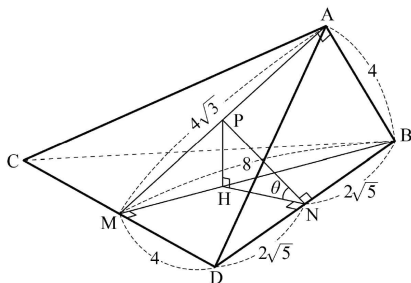
$$k^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$$

8 정답: 25

[출제의도] 공간도형을 활용하여 문제해결하기

$$\angle BMD = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \overline{BM} = 8$$

$$\angle BAM = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \overline{AM} = 4\sqrt{3}$$



점 P에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} \perp \overline{BM} \cdots \textcircled{A}$$

직선 AB와 평면 ACD가 서로 수직이므로

$$\overline{AB} \perp \overline{CD}$$

직선 CD는 두 직선 AB, BM과 서로 수직이므로

$$\overline{CD} \perp (\text{평면 } AMB)$$

직선 PH는 평면 AMB에 포함되므로

$$\overline{PH} \perp \overline{CD} \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에 의하여 } \overline{PH} \perp (\text{평면 } CDB)$$

$$\overline{PH} \perp (\text{평면 } CDB) \text{이고 } \overline{PN} \perp \overline{BD} \text{ 이므로}$$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HN} \perp \overline{BD}$

두 삼각형 DBM과 HBN은 서로 닮은

도형이므로 $\overline{BM} : \overline{MD} = \overline{BN} : \overline{NH}$ 에서

$$\overline{NH} = \frac{\overline{MD} \times \overline{BN}}{\overline{BM}} = \sqrt{5}$$

$$\angle BNH = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \overline{BM}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{NH}^2 = 25$$

$$\overline{BH} = 5, \overline{MH} = 3$$

$$\tan(\angle AMB) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 } \overline{PH} = \sqrt{3}$$

$$\overline{PN}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HN}^2 = 8$$

$$\overline{PN} = 2\sqrt{2}$$

두 평면 PDB, CDB의 교선은 직선 DB 이고 평면 PDB

위의 점 P의 평면 CDB 위로의 정사영이 H이므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{HN}}{\overline{PN}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

따라서 $40\cos^2\theta = 25$

9 [정답] 60

[출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인

정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서

선분 AQ에 내린 수선의 발을 O'라 하면 점 O'는 선분 AQ의 중점이고

$$\angle ABQ = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 점 B는 점 O'를 중심으로 하고}$$

반지름이 선분 AO'인 원 위의 점이다.

삼각형 BO'O에서

$$\overline{O'B} = \sqrt{3}, \overline{OB} = 2, \overline{OO'} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\angle BO'O = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{그러므로 } \overline{OO'} \perp \overline{O'B}, \overline{PO'} \perp \overline{O'B}$$

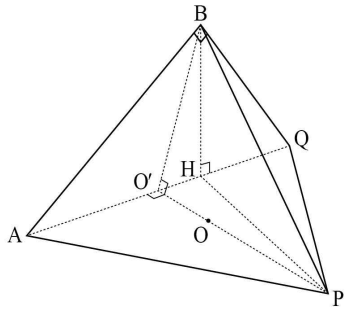
$$\overline{AO'} \perp \overline{PO'}, \overline{PO'} \perp \overline{O'B} \text{ 이므로 직선 PO'는 평면}$$

ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라

하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은

삼각형 APH이다.



삼각형 $BO'P$ 는 직각삼각형이고 $\overline{O'B} = \sqrt{3}$,
 $\overline{O'P} = 3$ 이므로 $\overline{PB} = 2\sqrt{3}$
삼각형 APB 는 $\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고,
 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 APB 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$
삼각형 ABQ 와 삼각형 AHB 는 닮음이므로
 $\overline{AH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
그러므로 삼각형 APH 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 3 = 2\sqrt{3}$
 $\cos\theta = \frac{(\text{삼각형 } APH \text{의 넓이})}{(\text{삼각형 } APB \text{의 넓이})} = \frac{\sqrt{15}}{5}$
따라서 $100\cos^2\theta = 100 \times \frac{3}{5} = 60$